

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова**

**Физический факультет
кафедра общей физики и физики конденсированного состояния**

**Сборник задач по курсу общей физики
Раздел «Строение вещества»**

Учебное пособие

Составители –
доцент А. Е. Богданов
доцент И. Ю. Гайдукова

Москва 2025

Содержание.

ТЕМА 1. ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ (I) -----	4
<i>Законы идеального газа. Первое начало термодинамики. Внутренняя энергия и работа газа. Циклы. Энтропия. -----</i>	
ТЕМА 2. ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ (II) -----	11
<i>Давление газа на стенку сосуда. Среднеквадратичная скорость молекул газа. Степени свободы молекул. Теплоемкость газов. -----</i>	
ТЕМА 3. ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ (III) -----	16
<i>Распределение Максвелла. Функция распределения молекул по скоростям. Наиболее вероятная скорость, средняя скорость, средняя квадратичная скорость. Распределение Больцмана. -----</i>	
ТЕМА 4. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ -----	21
<i>Уравнение Ван-дер-Ваальса. Критические параметры. Работа реального газа. Внутренняя энергия реального газа. Теплоемкость реального газа. -----</i>	
ТЕМА 5. ЯВЛЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ ГАЗОВ, ЖИДКОСТЕЙ И ТВЕРДЫХ ТЕЛ -----	28
<i>Поверхностное натяжение. Давление под изогнутой поверхностью. Смачивание, несмачивание. Капиллярные явления. -----</i>	
ТЕМА 6. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА. -----	31
<i>Теплопроводность. Внутреннее трение. Диффузия. -----</i>	
ТЕМА 7. КРИСТАЛЛИЧЕСКАЯ РЕШЕТКА -----	35
<i>Элементарная ячейка. Индексы Миллера. Обратная решетка. Дифракция рентгеновских лучей. -----</i>	
ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАНИЯМ СЕМИНАРА ПО ТЕМЕ 7. -----	41
ТЕМА 8. ДИНАМИКА КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ -----	43
<i>Дебаевская частота. Температура Дебая. Решеточная теплоемкость. Фононы. -----</i>	
ТЕМА 9. ЗОННАЯ ТЕОРИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА -----	47
<i>Зоны Бриллюэна. Энергетический спектр свободных электронов. Уровень Ферми. -----</i>	
ТЕМА 10. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МЕТАЛЛОВ. -----	50
<i>Электропроводность. Электросопротивление. Подвижность носителей тока. Эффект Холла. -----</i>	
ТЕМА 11. ПОЛУПРОВОДНИКИ -----	52

<i>Собственные, примесные полупроводники. Дрейфовая скорость. Электропроводность. Удельное сопротивление. Подвижность носителей тока. Эффект Холла.</i> -----	52
ТЕМА 12. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА. -----	55
<i>Магнитный момент атома. Магнетон Бора. Диамагнетизм, парамагнетизм, ферромагнетизм.</i> -----	55
КОНСТАНТЫ -----	57
ЛИТЕРАТУРА. -----	58

Тема 1. Идеальный газ (I)

Законы идеального газа. Первое начало термодинамики. Внутренняя энергия и работа газа. Циклы. Энтропия.

Задачи

1.1. Используя уравнение состояния Клапейрона-Менделеева, выразить объёмную плотность $\rho = m/V$ идеального газа через давление p , температуру T , молярную массу μ .

Ответ: $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$.

1.2. В приближении модели идеального газа, найти численные значения плотности ρ воздуха и концентрации n его молекул при комнатной температуре $t = 20^\circ\text{C}$ и нормальном атмосферном давлении $p_0 = 101325 \text{ Па}$. Молярная масса воздуха $\mu = 0.029 \text{ кг/моль}$.

Ответ: $\rho = \frac{101325 \cdot 0.029}{8.31 \cdot 293} \approx 1.207 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{101325 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}}{1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \cdot 293 \text{ К}} = 2.506 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

1.3. Показания трёх приборов, измеряющих температуру, давление и влажность в комнате (термометра, манометра и гигрометра), равны некоторым значениям t ($^\circ\text{C}$), p (мм рт. ст.), φ (%) соответственно. Давление насыщенного пара $p_n(T)$ при заданной температуре T считать известным. Оценить из этих данных:

1. концентрацию n_n водяного пара в комнате;
2. отношение k_1 давления водяного пара к полному давлению p в комнате;
3. отношение k_2 числа молекул водяного пара к числу молекул сухого воздуха;
4. численные значения n_n , k_1 , k_2 для показаний $t_1 = 23^\circ\text{C}$, $p_1 = 742 \text{ мм рт. ст.}$, $\varphi_1 = 24\%$. Давление насыщенного пара $p_n(t_1) = 2.81 \text{ кПа}$.

Ответ:

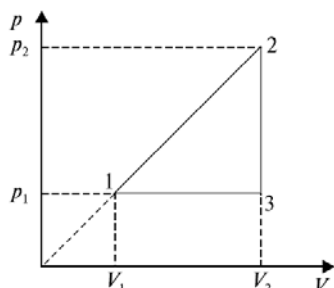
1. $n_n = \frac{p_n \varphi}{kT}$;

2. $k_1 = \frac{p_n \varphi}{p}$;

$$3. k_2 = \frac{p_{\text{н}} \varphi}{p - p_{\text{н}} \varphi} = \frac{k_1}{1 - k_1};$$

$$4. n_{\text{п}} \approx 1.65 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}; k_1 \approx 6.817 \cdot 10^{-3} \quad (0.68\%); k_2 \approx 6.864 \cdot 10^{-3} \quad (0.69\%).$$

1.4. Гелий массой $m=4$ г. совершает цикл (см. рис.). Найти:



1. работу A , совершаемую газом за один цикл,
2. количество теплоты Q_1 , принятое от нагревателя, и
3. количество теплоты Q_2 , переданное холодильнику за цикл.

$$p_1=200 \text{ кПа}, p_2=600 \text{ кПа}, V_1=1 \text{ л}, V_2=3 \text{ л}.$$

Ответ:

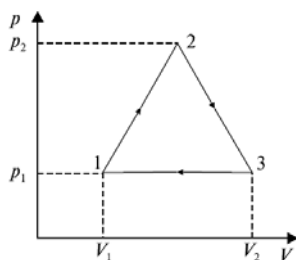
$$1. A = \frac{1}{2}(p_2 V_2 - p_1 V_1) - p_1 V_2 = 400 \text{ Дж}$$

$$2. Q_1 = 2(p_2 V_2 - p_1 V_1) = 3200 \text{ Дж}$$

$$3. Q_2 = \frac{3}{2} p_2 V_2 + p_1 (V_2 - V_1) = 2800 \text{ Дж}$$

1.5. Идеальному газу сообщили количество теплоты Q . При этом его внутренняя энергия изменилась на ΔU , а газ перешел из состояния 1 в состояние 3 через состояние 2 (см. рис.).

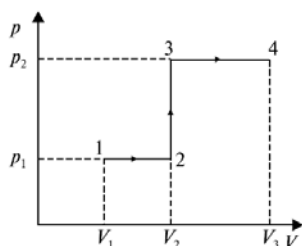
Найти давление газа p_1 , если значения V_1, V_2, p_2 известны.



Ответ:

$$p_1 = p_2 - 2 \frac{(Q - \Delta U)}{(V_2 - V_1)}$$

1.6. Идеальному газу сообщили количество теплоты Q . Газ перешел из состояния 1 в состояние 4 через состояния 2 и 3 (см. рис.). Найти изменение внутренней энергии газа ΔU , если значения V_1, V_2, V_3, p_1, p_2 известны.



Ответ:

$$\Delta U = Q - p_1(V_2 - V_1) - p_2(V_3 - V_2)$$

1.7. Определить изменение энтропии ΔS_M одного моля двухатомного газа при его переходе из состояния с температурой T_1 в состояние с температурой T_2 . Рассмотреть три случая перехода: 1. при адиабатическом процессе; 2. при изохорном процессе; 3. при изобарном процессе.

Ответ:

1. $\Delta S_M = 0$;

2. $\Delta S_M = \frac{5}{2} R \ln \frac{T_2}{T_1}$;

3. $\Delta S_M = \frac{7}{2} R \ln \frac{T_2}{T_1}$

1.8. Один моль идеального газа изотермически сжали, уменьшив его объем вдвое. Чему равно изменение энтропии?

Ответ:

$$\Delta S = -R \ln 2 = -5.76 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$$

1.9. Один моль идеального одноатомного газа нагрели в закрытом сосуде, увеличив его температуру вдвое. Чему равно изменение энтропии?

Ответ:

$$\Delta S = \frac{3}{2} R \ln 2 = 8.64 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$$

1.10. Найти изменение энтропии двух молей идеального одноатомного газа при изобарном расширении. Объем газа увеличился в два раза.

Ответ:

$$\Delta S = \frac{5}{2} \nu R \ln \frac{V_2}{V_1} = 28.8 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$$

1.11. Цикл Карно для ν молей идеального газа состоит из двух изотерм и двух адиабат. На p - V диаграмме этого цикла изотерма при температуре T_1 соединяет начальную точку (p_1, V_1) и точку (p_2, V_2) . Далее газ адиабатически расширяется до объёма V_3 , и его состояние на p - V диаграмме в конце этого участка соответствует точке (p_3, V_3) . Изотерма при температуре $T_2 < T_1$ соединяет точки (p_3, V_3) и (p_4, V_4) . Замыкает цикл адиабата, соединяющая точки (p_4, V_4) и (p_1, V_1) .

Построить цикл Карно для заданных значений T_1 и T_2 температур нагревателя и холодильника, объёмов рабочего тела V_1, V_2, V_3, V_4 в координатах:

1. p (давление), V (объем);
2. T (температура), S (энтропия).

1.12. Для каждого из четырех участков (тактов) 1-2 (изотерма), 2-3 (адиабата), 3-4 (изотерма), 4-1 (адиабата) цикла Карно найти:

1. зависимость давления от объёма $p = p(V)$;
2. изменение внутренней энергии ΔU , работу A , приращение теплоты ΔQ в соответствии с первым началом термодинамики, а также определить знаки этих величин;
3. приращение энтропии ΔS .

Указание. Работу сил давления газа при адиабатическом процессе найти двумя способами:

- интегрируя выражение $p = p(V)$ зависимости давления от объёма;
- применяя первое начало термодинамики.

Ответ:

Участок/ параметр	1-2	2-3	3-4	4-1
$p = p(V)$	$p = \frac{\nu RT_1}{V}$	$p(V) = \frac{p_2 V_2^\gamma}{V^\gamma} =$ $= \frac{p_3 V_3^\gamma}{V^\gamma} =$ $= \frac{C_{23}}{V^\gamma}$	$p = \frac{\nu RT_2}{V}$	$p(V) = \frac{p_1 V_1^\gamma}{V^\gamma} = \frac{p_4 V_4^\gamma}{V^\gamma} =$ $= \frac{C_{14}}{V^\gamma}$
ΔU	$\Delta U_{12} = 0$	$\Delta U_{23} = \frac{i}{2} \nu R (T_2 - T_1) =$ $= \frac{1}{\gamma - 1} \nu R (T_2 - T_1)$	$\Delta U_{34} = 0$	$\Delta U_{41} = \frac{i}{2} \nu R (T_1 - T_2) =$ $= \frac{1}{\gamma - 1} \nu R (T_1 - T_2)$
A	$A_{12} =$ $= \nu R T_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$	$A_{23} = \frac{p_2 V_2}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\gamma - 1} \right)$	$A_{34} = \nu R T_2 \ln \left(\frac{V_4}{V_3} \right)$	$A_{41} = \frac{p_4 V_4}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{V_4}{V_1} \right)^{\gamma - 1} \right)$
ΔQ	$\Delta Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} =$ $= 0 + A_{12} =$ $= \nu R T_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) > 0$	$Q_{23} = \Delta U_{23} + A_{23} = 0$	$Q_{34} = \Delta U_{34} + A_{34} =$ $= 0 + A_{34} =$ $= \nu R T_2 \ln \left(\frac{V_4}{V_3} \right) < 0$	$\Delta Q_{41} = \Delta U_{41} + A_{41} = 0$
ΔS	$\Delta S_{12} = \nu R \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$	$\Delta S_{23} = 0$	$\Delta S_{34} = \nu R \ln \left(\frac{V_4}{V_3} \right)$	$\Delta S_{41} = 0$

В таблице C_{14} и C_{23} – константы.

i – число степеней свободы молекулы

$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ - отношение молярных теплоемкостей

$\gamma = \frac{i+2}{i}$ (см. тему 2)

1.13. Показать, что для цикла Карно выполняется следующее соотношение между объемами:

$V_2/V_1 = V_3/V_4$. Указание. Использовать результаты решения задач 1.11, 1.12.

1.14. Рассчитать коэффициент η полезного действия (КПД) цикла Карно, используя результаты, полученные при решении задач 1.12 и 1.13. Выразить η через температуры нагревателя и холодильника T_1 и T_2 .

Ответ:

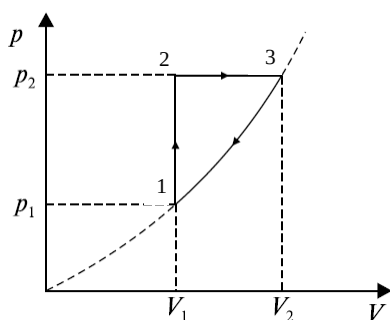
$$\eta = \frac{Q_{12} - |Q_{34}|}{Q_{12}} = \frac{\nu RT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) - \nu RT_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right)}{\nu RT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

1.15. Двигатель, работающий по циклу Карно (см. задачи 1.11, 1.12), получает от нагревателя $Q_1 = 700$ кал за один цикл. Температура нагревателя $T_1 = 600$ К, температура холодильника $T_2 = 300$ К. Найти совершаемую за цикл работу и количество теплоты, отдаваемое холодильнику.

Ответ:

$$A = Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 350 \text{ кал}, \quad Q_2 = Q_1 - A = 1466,5 \text{ Дж}$$

1.16. Один моль двухатомного газа совершает цикл, состоящий из изохорического нагревания при объеме V_1 , изобарического нагревания до объема V_2 и охлаждения до первоначального объема по закону $p = kV^2$ (см рис.). Определить КПД цикла.



Ответ:

$$\eta = \frac{2(2V_2^2 - V_1V_2 - V_1^2)}{3(5V_1^2 + 5V_1V_2 + 7V_2^2)}$$

1.17. Идеальный газ совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Максимальное давление в цикле в 3 раза больше минимального, максимальный объем в два раза больше минимального. Определить КПД цикла. Рассмотреть два случая: 1. газ одноатомный, 2. газ двухатомный.

Ответ:

$$\eta = \frac{4}{5i+6}$$

1. $\eta = 19\%$

2. $\eta = 12,9\%$

Тема 2. Идеальный газ (II)

Давление газа на стенку сосуда. Среднеквадратичная скорость молекул газа. Степени свободы молекул. Теплоемкость газов.

Задачи

2.1. Используя основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов, выразить давление p идеального газа через: 1. объёмную плотность газа ρ и среднюю квадратичную скорость движения молекул; 2. концентрацию молекул и среднюю кинетическую энергию $\langle \varepsilon \rangle$ хаотического теплового движения молекулы (для газа, состоящего из одинаковых молекул).

Ответ:

$$1. p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v^2 \rangle = \frac{1}{3} \rho \langle v^2 \rangle;$$

$$2. p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon \rangle.$$

2.2. Сколько молекул азота z ударяется за одну секунду о 1 м^2 стенки сосуда? Давление газа $p=10^5 \text{ Па}$ (одна атмосфера), температура $t=20^\circ \text{ С}$.

Ответ:

$$z = \frac{p}{k} \sqrt{\frac{R}{2\pi\mu T}} \approx 2.91 \cdot 10^{27}.$$

2.3. Сколько молекул газа z будет находиться в 1 см^3 сосуда при температуре $T=293 \text{ К}$, в котором создан высокий вакуум (давление в сосуде $p = 1 \cdot 10^{-8} \text{ мм. рт. ст.}$)?

Ответ:

$$z \approx 3.3 \cdot 10^8.$$

2.4. Вычислить давление p , оказываемое кислородом с концентрацией $n = 3 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$, если средняя квадратичная скорость движения молекул равна $\langle v_{\text{кв}} \rangle = 500 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Ответ:

$$p = \frac{nm\langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{3} = 13,4 \text{ Па}$$

2.5. Определить число и характер степеней свободы молекул газа, для которого отношение теплоемкостей $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ равно

1. 1.67
2. 1.40
3. 1.33
4. 1.29
5. 1.17

Ответ:

1. 3
2. 5
3. 6
4. 7
5. 12

2.6. Внутренняя энергия закрытой термодинамической системы в общем случае является функцией температуры и объёма, $U = U(T, V)$. Получить в общем виде выражение для разности молярных теплоёмкостей термодинамической системы при постоянном давлении и постоянном объеме $C_p - C_v$.

Ответ:

$$C_p - C_v = \left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p.$$

2.7. Используя результат решения задачи 2.6, получить выражение для разности молярных теплоёмкостей идеального газа при постоянном давлении и постоянном объеме $C_p - C_v$.

Ответ:

$$C_p - C_v = R.$$

2.8. Вычислить молярные теплоемкости C_p и C_v (выразить через R) и отношение этих теплоемкостей γ для газа с

1. одноатомными молекулами
2. двухатомными жесткими молекулами
3. двухатомными упругими молекулами
4. трехатомными жесткими молекулами, атомы которых не лежат на одной прямой.

Ответ:

$$1. \frac{3}{2}R, \frac{5}{2}R, \gamma=1.67; \quad 2. \frac{5}{2}R, \frac{7}{2}R, \gamma=1.4; \quad 3. \frac{7}{2}R, \frac{9}{2}R, \gamma=1.29; \quad 4. 3R, 4R, \gamma=1.33$$

2.9. Из скольких атомов n состоит молекула газа, если при "замораживании" колебательных степеней свободы γ увеличивается в 1.2 раза?

Ответ:

$$n=4$$

2.10. При температуре 1000 K у четырехатомных молекул газа возбуждены все степени свободы, включая колебательные. Определить внутреннюю энергию U одного моля газа.

Ответ:

$$U=75 \text{ кДж/моль}$$

2.11. Найти среднюю энергию и среднюю квадратичную скорость поступательного движения молекул аммиака NH_3 , находящихся в сосуде 10л под давлением 2800 Па. Концентрация молекул $3 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$.

Ответ:

$$\langle \varepsilon \rangle = 42 \text{ Дж}, \quad \langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3pN_A}{\mu n}} = 996 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

2.12. Какое давление p оказывает идеальный газ на стенки сосуда объемом $V=3 \text{ м}^3$, если в нем содержится $N=15 \cdot 10^{26}$ молекул и каждая обладает средней кинетической энергией поступательного движения $\varepsilon=6 \cdot 10^{-22} \text{ Дж}$?

Ответ:

$$p = \frac{2N\varepsilon}{3V} = 200 \text{ кПа}$$

2.13. Выразить скорость распространения звука $v_{зв}$ в идеальном газе через температуру газа T , его молярную массу μ и отношение теплоёмкостей $C_P/C_V = \gamma$. Использовать общее выражение для скорости распространения продольных возмущений в жидкой или газообразной среде:

$v_{зв} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, где роль модуля Юнга играет величина $E = -V \cdot (dP/dV)$. Распространение звука считать адиабатическим процессом. Оценить скорость v_1 звука в воздухе при температуре 20°C .

Ответ:

$$v_{зв} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}},$$

$$v_1 \approx 343 \text{ м/с}.$$

2.14. Политропическими называются процессы, в ходе которых теплоёмкость C тела остаётся постоянной. Получить уравнение политропического процесса для идеального газа, n – показатель политропы. Записать это уравнение, используя термодинамические параметры:

1. давление p и объём V ;
2. температуру T и объём V .

Ответ:

1. $pV^n = \text{const}$;
2. $TV^{n-1} = \text{const}$.

2.15. Выразить молярную теплоёмкость C идеального газа при политропическом процессе через показатель политропы n и отношение теплоёмкостей γ .

Ответ:

$$C = \frac{R(n-\gamma)}{(\gamma-1)(n-1)}.$$

2.16. При каких значениях показателя политропы n теплоёмкость C идеального газа в ходе политропического процесса: 1. положительна, 2. отрицательна, 3. равна нулю, 4. бесконечно велика.

Ответ:

1. $n < 1$ и $n > \gamma$;
2. $1 < n < \gamma$;
3. $n = \gamma$ - адиабатический процесс, теплоёмкость равна нулю;
4. $n = 1$ - изотермический процесс, теплоёмкость бесконечно велика.

Тема 3. Идеальный газ (III)

Распределение Максвелла. Функция распределения молекул по скоростям. Наиболее вероятная скорость, средняя скорость, средняя квадратичная скорость. Распределение Больцмана.

Распределение Максвелла молекул идеального газа по энергиям теплового движения:

$$F(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{Nd\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$$

Распределение Максвелла по скоростям:

$$F(v) = \frac{dN(v)}{Ndv} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$$

Барометрическая формула

$$n(z) = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}$$

Табличные интегралы:

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 1.$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x^2} x^4 dx = \frac{3}{8} \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda^{\frac{5}{2}}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{(2n-1)!}{2^n \alpha^n} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_0^{\infty} e^{\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

Задачи

3.1. Используя распределение Максвелла по скоростям, определить наиболее вероятную, среднюю и среднеквадратичную скорости молекул. При какой температуре наиболее вероятная и среднеквадратичная скорости в азоте N_2 различаются на 100 м/с ?

Ответ:

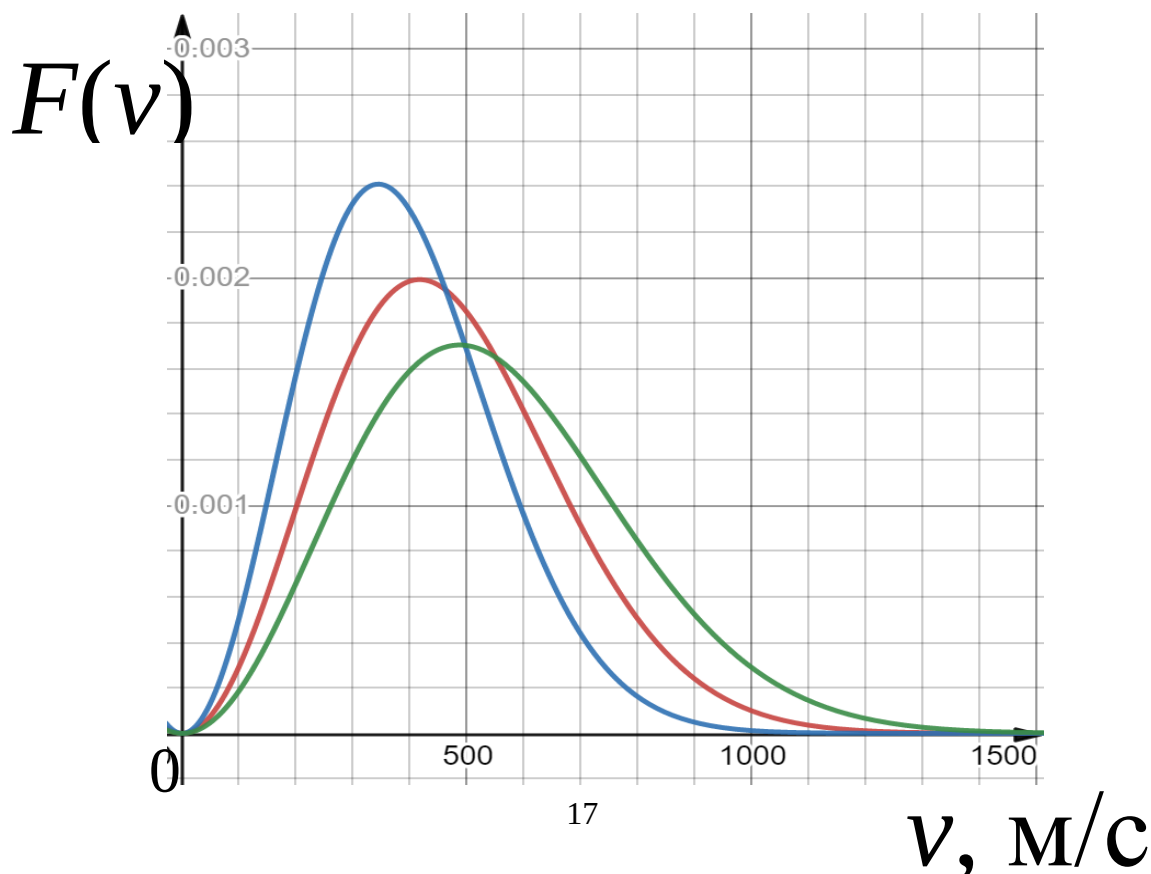
$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} \quad v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} \quad T = 333\text{K}$$

3.2. Вычислить наиболее вероятную, среднюю арифметическую и среднеквадратичную скорости молекул азота (N_2) при 20°C . Построить (в графическом редакторе) график функции распределения молекул азота по скоростям при этой температуре, а также для двух произвольных значений температур выше и ниже данной.

Ответ:

$$v_{\text{в}} \approx 417.25 \text{ м/с} ; \quad v_{\text{ср}} \approx 470.82 \text{ м/с} ; \quad v_{\text{ск}} \approx 511.02 \text{ м/с}.$$

Распределение Максвелла для молекул азота при температурах 200, 293, 400 K.



3.3. Вычислить значение функции распределения Максвелла в максимуме при наиболее вероятной скорости. Значения температуры T и массы m молекулы газа считать известными.

Ответ:

$$F(v_B) = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{8m}{\pi kT}}.$$

3.4. Найти температуру, при которой средняя квадратичная скорость молекул азота N_2 больше средней арифметической скорости на $\Delta v = 40$ м/с.

Ответ:

$$T = \frac{\mu(\Delta v)^2}{R(\sqrt{3} - \sqrt{8\pi})^2} = 290K$$

3.5. При какой температуре воздуха средние арифметические скорости молекул азота и кислорода отличаются на $\Delta v = 30$ м/с?

Ответ:

$$T = \frac{\pi\mu_1\mu_2(\Delta v)^2}{8R(\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1})^2} = 293K$$

3.6. Некоторый газ находится в равновесном состоянии. Какой процент молекул обладает скоростями, отличными от наиболее вероятной скорости не более чем на 1%?

Ответ:

$$0.08 \cdot \frac{1}{e\sqrt{\pi}} = 0.0166$$

3.7. Два моля идеального газа находятся при некоторой постоянной температуре T . Записать общее интегральное выражение для относительного $k = \Delta N/N$ и абсолютного N числа молекул газа, скорости которых:

1. меньше некоторого заданного значения v_1 ;
2. больше некоторого заданного значения v_2 ;
3. лежат в интервале между v_1 и v_2 ($v_1 < v_2$).

Показать на графике функции распределения Максвелла соответствующие площади фигур, численно равные относительному числу молекул для п. 1, 2, 3.

Ответ:

$$k_1 = \frac{\Delta N_1}{N} = \frac{\Delta N_1}{2N_A} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{v_1} \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) v^2 dv; \quad \Delta N_1 = k_1 \cdot 2N_A.$$

$$k_2 = \frac{\Delta N_2}{N} = \frac{\Delta N_2}{2N_A} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{v_2}^{\infty} \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) v^2 dv; \quad \Delta N_2 = k_2 \cdot 2N_A.$$

$$k_3 = \frac{\Delta N_3}{N} = \frac{\Delta N_3}{2N_A} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{v_1}^{v_2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) v^2 dv; \quad \Delta N_3 = k_3 \cdot 2N_A.$$

N_A – число Авогадро.

3.8. Азот находится в равновесном состоянии при температуре 421K. Найти наиболее вероятную скорость молекул. Определить относительное число молекул $\Delta N/N$, скорости которых лежат в пределах 1. 499.9...500.1 м/с, 2. 249.9...250.1 м/с, 3. 749.9...750.1 м/с, 4. 999.9...1000.1 м/с.

Ответ:

$$v_B = 500 \text{ м/с}$$

$$1. 3.32 \cdot 10^{-4}$$

$$2. 1.76 \cdot 10^{-4}$$

$$3. 2.14 \cdot 10^{-4}$$

$$4. 0.66 \cdot 10^{-4}.$$

3.9. Считая атмосферу изотермической, а ускорение свободного падения не зависящим от высоты, вычислить давление на высоте 1. 6 км, 2. 12 км, 3. -3км. Расчет провести для температуры 300K. Давление на уровне моря считать равным p_0 .

Ответ:

$$1. 0.5p_0,$$

$$2. 0.25p_0,$$

$$3. 1.41p_0.$$

3.10. Вблизи поверхности Земли отношение объемных концентраций кислорода и азота в воздухе $\eta_0 = 20.95/78.8 = 0.268$. Считая температуру атмосферы не зависящей от высоты и равной 0°C , определить это отношение на высоте 10 км.

Ответ:

$$\eta = 0.226$$

3.11. Установленная вертикально закрытая с обоих концов труба наполнена газообразным кислородом. Высота трубы $h = 200$ м, объем $V = 200$ л. Стенки трубы имеют температуру $T = 293\text{K}$ по всей длине. Давление газа внутри трубы у основания $p_0 = 10^5$ Па. Определить:

1. давление p в трубе у ее верхнего конца
2. количество молекул кислорода z , находящихся в трубе.

Ответ:

$$1. p = 0.97 \cdot 10^5 \text{ Па},$$

$$2. z = 4.79 \cdot 10^{26}$$

3.12. Показания манометра на уровне земли оказались равны $p_0 = 743$ мм. рт. ст., а на крыше здания его показания равны $p_1 = 737$ мм. рт. ст. Оценить из этих данных высоту H здания. Температуру t воздуха принять равной 20°C . Молярная масса воздуха $\mu = 0.029$ кг/моль.

Ответ:

$$H = - \frac{RT \ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right)}{\mu g} \approx 69.4 \text{ м.}$$

Тема 4. Реальные газы

Уравнение Ван-дер-Ваальса. Критические параметры. Работа реального газа. Внутренняя энергия реального газа. Теплоемкость реального газа.

Задачи.

- 4.1.** 1. Почему поведение газов в широком интервале давлений и температур нельзя описать уравнением состояния $pV = \nu RT$?
2. В чём заключается физический смысл поправок a и b к давлению и объёму в уравнении Ван-дер-Ваальса?
3. Какой участок изотермы Ван-дер-Ваальса не соответствует реальной зависимости давления газа от объёма? Почему зависимость $p = p(V)$ на этом участке не может реализоваться при постоянной температуре?

- 4.2.** Уравнение Ван-дер-Ваальса для одного моля газа записывается в виде:

$$\left(p + \frac{a}{V_M^2}\right)(V_M - b) = RT$$

Записать это уравнение для газа, содержащего ν молей.

Ответ:

$$\left(p + \frac{a'}{V^2}\right)(V - b') = \nu RT, \quad a' = \nu^2 a, \quad b' = \nu b.$$

- 4.3.** Определить из уравнения Ван-дер-Ваальса для одного моля реального газа критические параметры p_k , V_k , T_k через постоянные a и b .

Ответ:

$$V_k = 3b, \quad T_k = \frac{8a}{27bR}, \quad p_k = \frac{a}{27b^2}.$$

- 4.4.** Выразить постоянные a и b в уравнении Ван-дер-Ваальса, записанного для одного моля газа, через следующие критические параметры:

1. давление p_k , объём V_k и критическую плотность вещества ρ_k (эта величина приводится в справочных таблицах);
2. давление p_k , температуру T_k и универсальную газовую постоянную R ;

3. температуру T_K , объём V_K и универсальную газовую постоянную R .

Ответ:

$$1. a = 3p_K V_K^2; \quad b = \frac{1}{3} V_K; \quad V_K = \frac{\mu}{\rho_K} \quad (\mu - \text{молярная масса})$$

$$2. a = \frac{27R^2 T_K^2}{64p_K}; \quad b = \frac{RT}{8p_K}$$

$$3. a = \frac{9}{8} R T_K V_K$$

4.5. 1. Выразить газовую постоянную R в уравнении Ван-дер-Ваальса через критические параметры (объём V_K , температуру T_K , давление p_K).

2. Рассчитать газовую постоянную $R(N_2)$ и постоянные Ван-дер-Ваальса a и b для азота N_2 , используя значения критических параметров из справочной литературы и результаты решения пунктов 1-3 задачи 4.4. Сравнить полученное значение газовой постоянной $R(N_2)$ со значением молярной универсальной газовой постоянной R для идеального газа ($R = kN_A = 8.31 \text{ Дж/моль}\cdot\text{К}$). Предложить объяснение полученных результатов.

3. Провести расчёты п. 2. данной задачи для кислорода O_2 .

Критические параметры для азота: $t_K = -149.9 \text{ }^\circ\text{C}$, $p_K = 3.39 \text{ МПа}$, плотность в критической точке $\rho_K = 0.304 \text{ кг/дм}^3$.

Критические параметры для кислорода: $t_K = -118.8 \text{ }^\circ\text{C}$, $p_K = 4.97 \text{ МПа}$, плотность в критической точке $\rho_K = 0.430 \text{ кг/дм}^3$.

Ответ:

$$1. R = \frac{8p_K V_K}{3T_K}$$

$$2. R(N_2) = 6.76 \text{ Дж/моль}\cdot\text{К}; \quad a = 8.628 \cdot 10^{-2} \text{ Па}\cdot\text{м}^6/\text{моль}^2; \quad b = 3.070 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль} \quad (\text{п. 1 задачи 4.4})$$

$$a = 1.305 \cdot 10^{-1} \text{ Па}\cdot\text{м}^6/\text{моль}^2; \quad b = 3.777 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль} \quad (\text{п. 2 задачи 4.4})$$

$$a = 1.061 \cdot 10^{-1} \text{ Па}\cdot\text{м}^6/\text{моль}^2 \quad (\text{п. 3 задачи 4.4}).$$

$$3. R(O_2) = 6.39 \text{ Дж/моль}\cdot\text{К}; \quad a = 8.257 \cdot 10^{-2} \text{ Па}\cdot\text{м}^6/\text{моль}^2; \quad b = 2.481 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль} \quad (\text{п. 1 задачи 4.4})$$

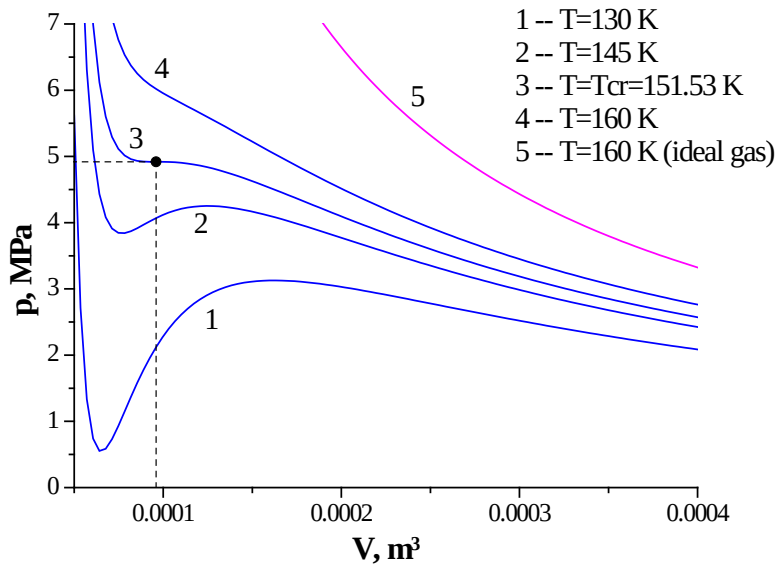
$$a = 1.396 \cdot 10^{-1} \text{ Па}\cdot\text{м}^6/\text{моль}^2; \quad b = 3.226 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль} \quad (\text{п. 2 задачи 4.4})$$

$$a = 1.074 \cdot 10^{-1} \text{ Па}\cdot\text{м}^6/\text{моль}^2 \quad (\text{п. 3 задачи 4.4}).$$

4.6. Постоянные Ван-дер-Ваальса для кислорода (O_2), согласно справочным данным, равны:

$$a = 0.136 \text{ Па}\cdot\text{м}^6/\text{моль}^2, \quad b = 3.2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Построить (с помощью любой программы для построения графиков) изотермы Ван-дер-Ваальса для ряда значений температур ($T < T_k$, $T = T_k$, $T > T_k$), используя постоянные a и b для кислорода. Для сравнения показать на графике изотерму идеального газа. Чем отличаются изотермы Ван-дер-Ваальса от реальных изотерм?



4.7. Газ количеством $\nu=0,25$ кмоль занимает объем $V_1=1\text{ м}^3$. При расширении до объема $V_2=1,2\text{ м}^3$ была совершена работа против сил молекулярного взаимодействия $A=1,42$ кДж. Определить поправку a в уравнении Ван-дер-Ваальса.

Ответ:

$$a = \frac{AV_1V_2}{\nu^2(V_2-V_1)} = 0,136 \text{ Н}\cdot\text{м}^4/\text{моль}^2$$

4.8. Получить выражение для работы A , совершаемой молекулами ван-дер-ваальсовского газа при изотермическом расширении от объема V_1 до объема V_2 . Температура газа T , постоянные a и b известны. Сравнить полученное выражение с аналогичным выражением для идеального газа.

Ответ:

$$A = RT \ln[(V_2 - b)/(V_1 - b)] + a\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right)$$

4.9. Моль азота охлажден до температуры -100°C . Определить давление p , оказываемое газом на стенки сосуда, если объем V , занимаемый газом, равен $1,00$ л. Сравнить давление p с

давлением $p_{ид}$, которое имел бы азот, если бы сохранил при рассматриваемых условиях свойства идеального газа.

Для азота постоянные Ван-дер-Ваальса считать равными: $a = 0.135 \text{ Па} \cdot \text{м}^6 / \text{моль}^2$,
 $b = 3.9 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 / \text{моль}$.

Ответ:

$$p \approx 1.362 \text{ МПа}, \quad p_{ид} \approx 1.439 \text{ МПа}.$$

4.10. Для определения постоянных Ван-дер-Ваальса некоторое количество газа, занимающее при температуре $T_1=300\text{К}$ и давлении $p_1=10^7\text{Па}$ объем $V_1=6.79 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$, было изотермически сжато до объема $V_2=4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$, в результате чего давление возросло до значения $p_2=1.65 \cdot 10^7\text{Па}$. Затем газ был охлажден изохорически до температуры $T_2=200\text{К}$. Давление при этом уменьшилось до $p_3=0.819 \cdot 10^7\text{Па}$. Вычислите постоянные a и b для одного моля газа.

Ответ:

$$a = 0,15 \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^6}{\text{моль}^2} \quad b = 3,3 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$$

4.11. Определить во сколько раз отличается объем одного моля реального газа кислорода от объема одного моля идеального газа при нормальных условиях $p=101000 \text{ Па}$, $T=273 \text{ К}$. Для кислорода взять константы $a=0.136 \text{ Па} \cdot \text{м}^6 / \text{моль}^2$, $b=3.16 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 / \text{моль}$.

Ответ:

$$\frac{V_p}{V_{ид}} = 0.9987$$

4.12. Моль азота расширяется адиабатически в пустоту. При этом объем газа увеличивается от значения $V_1=1\text{л}$ до $V_2=10\text{л}$. Определить приращение температуры ΔT .

Ответ:

$$\Delta T = a(\gamma - 1) \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) \frac{1}{R} = -5,8\text{К}$$

4.13. Получить выражение для внутренней энергии $U = U(T, V)$ одного моля газа Ван-дер-Ваальса.

Ответ:

$$U(T, V) = C_V T - \frac{a}{V}$$

4.14. Моль кислорода, занимавший объем $V_1=1\text{л}$ при температуре -100°C , расширился изотермически до объема $V_2=10\text{л}$. Найти:

1. приращение внутренней энергии ΔU_M ,
2. работу A , совершенную газом (сравнить с работой идеального газа)
3. количество теплоты, полученное газом.

Ответ:

1. $\Delta U_M = a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) = 122 \text{ Дж}$

2. $A = 3,23 \text{ кДж} = 0,98 A_{ид}$

3. $Q = 3,35 \text{ кДж}$

4.15. Получить для газа Ван-дер-Ваальса уравнение адиабаты в переменных V и T , в переменных V и p .

Ответ:

$$T(V - b)^{\frac{R}{C_V}} = \text{const}$$

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b)^{\frac{R}{C_V} + 1} = \text{const}$$

4.16. Определить для газа Ван-дер-Ваальса разность молярных теплоемкостей $C_p - C_V$

Вычислить эту разность для азота в объеме $V_1=1\text{л}$ при температуре -100°C (выразить через R).

Ответ:

$$C_p - C_V = \frac{R}{\left[1 - 2 \frac{a(V - b)^2}{RTV^3}\right]} \approx R \left(1 + \frac{2a}{RTV}\right)$$

$$C_p - C_V = 1,21R$$

Для азота $a = 3p_K V_K^2 = 0,135 \text{ Па} \cdot \frac{\text{м}^6}{\text{моль}^2}$, $b = 3,9 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$.

4.17. Потенциальная энергия взаимодействия двух атомов может быть приближённо описана суммой двух степенных функций (потенциал Ми):

$$U(r) = U_{\text{пр}}(r) - U_{\text{от}}(r) = -\frac{a}{r^m} + \frac{b}{r^n},$$

$a > 0$ и $b > 0$ – постоянные, имеющие соответствующую размерность,

m и n – натуральные числа. Найти:

1. расстояние r_0 между атомами, соответствующее положению равновесия (минимуму потенциальной энергии $U(r)$);
2. потенциальную энергию $U_0 = U(r_0)$ в положении равновесия (энергию сцепления);
3. показать, что показатели степени в выражении для потенциальной энергии должны удовлетворять неравенству $n > m$.

Ответ:

$$1. r_0 = \sqrt[n-m]{\frac{nb}{ma}}$$

$$2. U_0 = -\frac{a}{r_0^m} \left(1 - \frac{m}{n}\right)$$

4.18. Ионная связь относится к числу электромагнитных сил связей, которые являются наиболее сильными из всех известных взаимодействий на атомно-молекулярном уровне. Вклад в потенциальную энергию за счёт притяжения можно записать, положив $m = 1$ (кулоновское взаимодействие). Полная энергия $U_1(r)$ (частный случай потенциальной энергии $U(r)$ задачи 4.17) :

$$U_1(r) = U_{1\text{пр}}(r) - U_{1\text{отт}}(r) = -\frac{a_1}{r^m} + \frac{b_1}{r^n} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{B}{r^n}$$

q – модуль заряда иона, постоянная $a_1 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}$.

Для данного вида функции $U_1(r)$ найти:

1. зависимость $F_{1\text{пр}}(r)$ силы притяжения и $F_{1\text{отт}}(r)$ силы отталкивания между атомами от расстояния r между ними. Чему равны эти силы в положении равновесия при $r = r_0$?
2. постоянную b_1 (выразить через величины q , n и r_0 – расстояние между атомами в положении равновесия);
3. результирующую потенциальную энергию $U_1(r_0)$ в положении равновесия и энергию диссоциации $D = -U_1(r_0)$ двухатомной молекулы;

4. численное значение энергии $U_1(r_0)$ для молекулы $NaCl$ в эВ (сделать приближённую оценку парного взаимодействия ионов Na и Cl), приняв $q = e$, $m=1$, $n=10$, $r_0 \approx 2.5 \cdot 10^{-8}$ см;
5. построить графики зависимостей потенциальной энергии взаимодействия $U_1(r)$ ионов от расстояния r между ними и силы их взаимодействия $F_1(r)$ для данной задачи (можно принять $q = e$, $m=1$, $n=10$).

Ответ:

$$1. F_{\text{пр}} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r}; \quad F_{\text{от}} = \frac{bn}{r^{n+1}}; \quad F_{\text{пр}} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -F_{\text{от}}$$

$$2. b_1 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 n} r_0^{n-1}$$

$$3. U_1(r_0) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = -D$$

$$4. U_1(r_0) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \left(1 - \frac{1}{10}\right) \approx -5.187 \text{ эВ}$$

Тема 5. Явления на границе газов, жидкостей и твердых тел

Поверхностное натяжение. Давление под изогнутой поверхностью. Смачивание, несмачивание. Капиллярные явления.

Задачи.

5.1. Найти добавочное давление p внутри мыльного пузыря диаметром $d=10$ см. Определить работу A , которую надо совершить, чтобы выдуть этот пузырь. Коэффициент поверхностного натяжения мыльной воды $\sigma=40$ мН/м.

Ответ:

$$p = \frac{8\sigma}{d} = 3.2 \text{ Па}$$

$$A = 2\pi\sigma d^2 = 2.5 \text{ мДж}$$

5.2. Определить изменение свободной энергии ΔU поверхности мыльного пузыря при изотермическом увеличении его объема от $V_1=10 \text{ см}^3$ до $V_2=2V_1$. Коэффициент поверхностного натяжения мыльной воды $\sigma=40$ мН/м.

Ответ:

$$2\sqrt[3]{36\pi V_1^2 \sigma (\sqrt[3]{4} - 1)} = 105.5 \text{ мкДж}$$

5.3. Определить работу A , необходимую для распыления жидкости массой $m=1$ г на капли диаметром $d=2$ мкм. Плотность жидкости $\rho=980$ кг/м³, коэффициент поверхностного натяжения мыльной воды $\sigma=45$ мН/м.

Ответ:

$$A = 4\pi\sigma \left(\frac{3m}{2\rho d} - \sqrt[3]{\left(\frac{3m}{4\rho}\right)^2} \right) = 0.138 \text{ Дж}$$

5.4. Из вертикальной трубки радиусом $r=1$ мм вытекают капли воды. Найти радиус капли R в момент отрыва. Каплю считать сферической. Диаметр шейки капли в момент отрыва равен

внутреннему диаметру трубки. Плотность воды 1000 кг/м^3 , коэффициент поверхностного натяжения $\sigma=0.073 \text{ Н/м}$.

Ответ:

$$R = \sqrt[3]{\frac{3\sigma r}{2\rho g}} = 2.2 \text{ мм}$$

5.5. Какую силу надо приложить, чтобы оторвать друг от друга две смоченные фотопластинки размером $9 \times 12 \text{ см}^2$. Толщина водяной прослойки между пластинами $d=0.05 \text{ мм}$. Смачивание полное, коэффициент поверхностного натяжения $\sigma=0.073 \text{ Н/м}$.

Ответ:

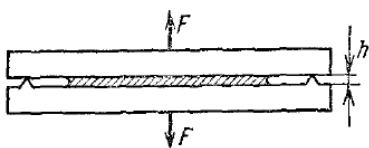
$$F = \frac{2\sigma S}{d} = 31.5 \text{ Н}.$$

5.6. В стеклянную трубку с внутренним диаметром $d_1=20 \text{ мм}$ вставлена коаксиально стеклянная палочка диаметром $d_2=19 \text{ мм}$. Считая смачивание полным, определить высоту подъема h воды в кольцевом зазоре между трубкой и палочкой.

Ответ:

$$h = \frac{4\sigma}{\rho g} (d_1 - d_2) = 3 \text{ см}.$$

5.7. По краю одной из круглых стеклянных пластин имеется кольцевой выступ высотой $h=2 \text{ мкм}$. Между пластинами помещена капля воды объемом $V=15 \text{ мм}^3$, после чего пластины прижаты друг к другу. Какую силу нужно приложить к пластинам, чтобы оторвать их друг от друга?



Ответ:

$$F = \frac{2\sigma V}{h^2} = 0.55 \text{ кН}$$

5.8. Разность уровней смачивающей жидкости в коленях U-образной трубки $\Delta h = 23 \text{ мм}$. Диаметры каналов в коленях трубки $d_1 = 2 \text{ мм}$, $d_2 = 0.4 \text{ мм}$. Плотность жидкости $\rho = 0.8 \text{ г/см}^3$. Определить коэффициент поверхностного натяжения жидкости σ .

Ответ:

$$\sigma = \frac{\rho g \Delta h d_1 d_2}{4(d_1 - d_2)} = 2.3 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Тема 6. Явления переноса.

Теплопроводность. Внутреннее трение. Диффузия.

Задачи.

6.1. Зазор между двумя концентрическими сферами заполнен однородным изотропным веществом. Радиусы сфер $r_1=10\text{см}$, $r_2=20\text{см}$. Поверхность внутренней сферы поддерживается при температуре $T_1=400\text{К}$, поверхность внешней – при температуре $T_2=300\text{К}$. В этих условиях от внутренней сферы к внешней течет установившийся тепловой поток $q=1\text{кВт}$. Считая коэффициент теплопроводности κ вещества в зазоре не зависящим от температуры, определить: 1. значение κ , 2. температуру в зазоре $T(r)$ как функцию расстояния от центра сфер r .

Ответ:

$$1. \kappa = \frac{q}{4\pi(T_1-T_2)} \frac{r_2-r_1}{r_1 r_2} \approx 4.0 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$$

$$2. T = (T_1 - T_2) \frac{r_1 r_2}{r(r_2-r_1)} + \frac{r_2 T_2 - r_1 T_1}{r_2 - r_1} = T_1 - \frac{r_2(r-r_1)(T_1-T_2)}{r(r_2-r_1)} = \left(\frac{20\text{м}}{r} + 200\right) \text{К}$$

6.2. Для системы, образованной из двух концентрических сфер с диэлектриком между ними, найти в общем виде зависимость температуры вещества $T = T(r)$ от расстояния r до центра сфер, считая коэффициент теплопроводности диэлектрика $\kappa(T)$ зависящим от температуры, $\kappa \sim T^{1/2}$. Радиусы сфер r_1 и r_2 и их температуры T_1 и T_2 считать известными.

Ответ:

$$T(r) = \left[\left(\frac{r_1-r}{r_2-r_1} \right) \left(\frac{r_2}{r} \right) \left(T_1^{\frac{3}{2}} - T_2^{\frac{3}{2}} \right) + T_1^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{2}{3}}.$$

6.3. Два металлических тела, имеющих форму полых круговых коаксиальных цилиндров с радиусами оснований R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$), поддерживаются при температурах T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$) соответственно. Найти количество теплоты ΔQ , которое пройдет за время Δt через боковую поверхность цилиндра радиуса r ($R_1 < r < R_2$) и длины L , расположенного между двумя данными металлическими цилиндрами. Цилиндры R_1 , R_2 , r имеют общую ось симметрии. Коэффициент теплопроводности среды между цилиндрами равен κ .

Ответ:

$$\Delta Q = \frac{2\pi\kappa L(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \Delta t.$$

6.4. Два тела, теплоемкость каждого из которых равна $C=500 \text{ Дж/К}$, соединены стержнем длиной $l=40 \text{ см}$ с площадью поперечного сечения $S=3 \text{ см}^2$. Теплопроводность стержня не зависит от температуры и равна $\kappa=20 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$. Тела и стержень образуют теплоизолированную систему. В начальный момент температуры тел отличаются друг от друга. Через какое время τ разность температур тел уменьшится в $\eta = 2$ раза? Теплоемкостью стержня пренебречь.

Ответ:

$$\tau = \frac{lC \ln \eta}{2\kappa S} = 1.16 \cdot 10^4 \text{ с} \approx 3 \text{ ч}.$$

6.5. Для экспериментального определения коэффициента η вязкости воздуха используется следующий метод. Воздух накачивается в сосуд до давления $P_{нач}$, превышающего атмосферное давление P_0 на некоторую величину $\Delta P_{нач} = P_{нач} - P_0$, а затем постепенно выходит из сосуда в атмосферу через трубку малого диаметра – капилляр. При этом разность $\Delta P = P - P_0$ давления P в сосуде и атмосферного давления уменьшается с течением времени. Фиксируются значения времени t , при которых достигаются определённые разности давлений ΔP . Коэффициент η вязкости рассчитывается по тангенсу A угла наклона прямой, соответствующего линейному участку зависимости $\ln(\Delta P/\Delta P_{нач})$ от t . Расчётные формулы выводятся для небольших по сравнению с атмосферным давлением значений ΔP .

1. Для описанного выше опыта получить выражение для скорости изменения давления в сосуде, т.е. производной dP/dt давления по времени. Выразить эту производную через давление в сосуде в некоторый момент времени P , а также длину капилляра L_0 , диаметр капилляра D_0 , объём сосуда V_0 и коэффициент вязкости η . Считать течение воздуха по трубке ламинарным и стационарным. Применить для расчётов формулу Пуазейля.

Поток вещества Q ($\text{м}^3/\text{с}$):

$$Q = \frac{\pi D_0^4 \Delta P}{128 \eta L_0},$$

ΔP – перепад давлений на концах капилляра.

Ответ:

$$\frac{dP}{dt} = - \frac{\pi D_0^4 P \Delta P}{128 \eta L_0 V_0}.$$

2. Получить выражение для тангенса A угла наклона прямой, соответствующего линейному участку зависимости $\ln(\Delta P / \Delta P_{нач})$ от t . Давление в сосуде $P = P_0 + \Delta P$ принять равным некоторому среднему значению $\langle P \rangle$ за время проведения эксперимента.

Ответ:

$$A = - \frac{\pi D_0^4 \langle P \rangle}{128 \eta L_0 V_0}.$$

3. Получить выражение для коэффициента η вязкости.

Ответ:

$$\eta = \frac{\pi D_0^4 \langle P \rangle}{128 |A| L_0 V_0}.$$

6.6. Кислород находится при температуре $300K$ под давлением $10^5 Pa$. Определить: 1. среднюю длину пробега молекул λ , 2. среднее время свободного пробега. Эффективный диаметр молекулы кислорода $d=0.38$ нм.

Ответ:

$$1. \lambda = 0.76 \cdot 10^{-7} м, \quad 2. \tau = 1.71 \cdot 10^{-10} с$$

6.7. Найти число столкновений k за секунду между молекулами азота, содержащимися в $1 м^3$ $300 K$ под давлением $10^5 Pa$. Эффективный диаметр молекулы азота $d=0.28$ нм.

Ответ:

$$k=8.4 \cdot 10^9.$$

6.8. Коэффициент самодиффузии кислорода при температуре $t=0^{\circ}C$ и давлении $P=10^5 Pa$ равен $D = 1.8 \cdot 10^{-5} \frac{м}{с^2}$. Оценить среднюю длину свободного пробега λ молекул кислорода при этих условиях.

Ответ:

$$\lambda \approx 1.3 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

Тема 7. Кристаллическая решетка

Элементарная ячейка. Индексы Миллера. Обратная решетка. Дифракция рентгеновских лучей.

Задачи.

7.1. Найти число n атомов алюминия в единице объёма (1 м^3). Плотность алюминия $\rho = 2.699 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Молярная масса алюминия $\mu = 26.98 \text{ г/моль}$

Ответ: $n = 6.022 \cdot 10^{28}$.

7.2. Сколько атомов приходится на одну элементарную ячейку в кубической кристаллической решётке

1. простой; 2. объёмноцентрированной; 3. гранецентрированной?

Ответ:

1. 1;

2. 2;

3. 4.

7.3. Плотность кристалла NaCl равна $\rho = 2.18 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ (ГЦК структура). Атомный вес натрия 23, хлора - 35.45. Определить постоянную решётки a .

Ответ:

$a = 5.64 \text{ Å}$.

7.4. Пусть элементарная ячейка простой кубической решётки построена из одинаковых атомов, представляющих собой жёсткие сферы с радиусом r . Параметр элементарной ячейки $a = 2r$ (атомы касаются друг друга). Показать, что часть объёма, занятая атомами при таком расположении, равна $\pi/6 = 0.523$.

7.5. Определить радиусы r атомов, которые могут быть размещены в октаэдрических (r_1) и тетраэдрических (r_2) пустотах при плотных упаковках равновеликих шаров радиуса R .

Ответ:

$$r_1 = R(\sqrt{2} - 1) = 0.41R ; \quad r_2 = R\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right) = 0.22R.$$

7.6. Параметр элементарной ячейки кубического кристалла равен a . Найти расстояние между точками с индексами

1. $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} 0 \frac{1}{2}\right]$ и $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} 1 \frac{1}{2}\right]$

2. $[000]$ и $[111]$

3. $\left[10 \frac{1}{2}\right]$ и $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} 1 \frac{1}{2}\right]$

Ответ:

1. $l = a$, 2. $l = a\sqrt{3}$, 3. $l = a\sqrt{\frac{5}{4}}$

7.7. Найти угол α между направлениями $[236]$ и $[321]$ в кубическом кристалле.

Ответ:

$$\alpha = 46.6^\circ$$

7.8. Найти угол α между плоскостями (123) и (321) в кубическом кристалле.

Ответ:

$$\alpha = 44.4^\circ$$

7.9. Некоторая плоскость отсекает на осях координат отрезки u , v , w , данные в единицах длин рёбер элементарной ячейки. Определить индексы Миллера $(h \ k \ l)$ этой плоскости для следующих значений отрезков:

1. $u = 0.5$, $v = 1.25$, $w = 1.5$;

2. $u = 0.75$, $v = 1.6$, $w = 2$.

Ответ:

1. $(h \ k \ l) = (15, 6, 5)$;

2. $(h \ k \ l) = (32, 15, 12)$.

7.10. Выражение для объёма V элементарной ячейки задается в общем виде выражением

$$V = abc\sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} \text{ (см. Приложение II-7.1).}$$

Получите выражение для объема элементарной ячейки для: 1. моноклинной системы; 2. гексагональной системы.

Ответ:

1. $V = abc\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = abc \cdot \sin \beta$;

2. $V = abc\sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = abc \cdot \sin \gamma = a^2 c \frac{\sqrt{3}}{2}$.

7.11. Элементарная ячейка магния принадлежит к гексагональной системе и имеет параметры $a = 3.20 \text{ \AA}$ и $c = 5.20 \text{ \AA}$. Определить: 1. векторы обратной решётки; 2. число n элементарных ячеек в 1 см^3 кристалла магния.

Ответ:

1. $a^* \approx 0.12 \text{ \AA}^{-1}$, $b^* \approx 0.12 \text{ \AA}^{-1}$, $c^* \approx 0.064 \text{ \AA}^{-1}$;

2. $n \approx 7.2 \cdot 10^{21}$.

7.12. Получить формулы для вычисления межплоскостных расстояний d_{hkl} кристаллов 1. ромбической; 2. гексагональной; 3. тетрагональной; 4. кубической систем из формулы для межплоскостных расстояний кристаллов триклинной системы (см. приложение II-7.3); 5. рассчитать с помощью индексов Миллера расстояния между соседними кристаллическими плоскостями (100), (110) и (111) для примитивной кубической решётки с параметром a .

Ответ:

1. $d_{hkl} = \frac{abc}{\sqrt{b^2 c^2 h^2 + a^2 c^2 k^2 + b^2 a^2 l^2}}$;

2. $d_{hkl} = \frac{\sqrt{3}ac}{\sqrt{4c^2(h^2 + hk + k^2) + 3a^2 l^2}}$;

3. $d_{hkl} = \frac{ac}{\sqrt{c^2 h^2 + c^2 k^2 + a^2 l^2}}$;

4. $d_{hkl} = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}$;

$$5. \quad d_{100} = a, \quad d_{110} = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad d_{111} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

7.13. Доказать, что в кристалле могут быть оси симметрии только 1, 2, 3, 4 и 6 порядков.

7.14. Определить постоянную решетки кристалла LiI (ГЦК модификация), если зеркальное отражение первого порядка рентгеновских лучей с длиной волны $\lambda = 2.20 \text{ \AA}$ от естественной грани этого кристалла происходит при угле отражения $10^\circ 5'$.

Ответ:

$$d \approx 6.3 \text{ \AA}$$

7.15. Расстояние d между атомными плоскостями в кристалле поваренной соли равно 0.281 нм . При каком максимальном угле падения α будет наблюдаться усиление отражённых рентгеновских лучей с длиной волны $\lambda = 0.1 \text{ нм}$? Порядок отражения $n = 1$.

Ответ:

$$\alpha = 79.8^\circ.$$

7.16. Длина волны рентгеновского излучения медного анода составляет $\lambda = 1.534 \text{ \AA}$. Дифракция этих лучей от плоскостей (111) кристалла алюминия происходит под брэгговским углом $19^\circ 2'$. Алюминий имеет ГЦК структуру. Плотность алюминия 2699 кг/м^3 , молярная масса $\mu = 26.98 \text{ г/моль}$. Рассчитать число Авогадро по этим данным.

Ответ:

$$N_A \approx 6 \cdot 10^{26} \text{ кмоль}^{-1}.$$

7.17. Кристаллы меди имеют гранецентрированную кубическую решётку. При комнатной температуре ребро элементарного куба равно $3.608 \text{ \AA}$. Монокристалл меди вырезан параллельно одной из граней элементарного куба. Пусть на поверхность кристалла падает монохроматический пучок рентгеновских лучей с длиной волны $\lambda = 1.658 \text{ \AA}$. Показать, что плоскости, параллельные поверхности, будут отражать рентгеновские лучи, если угол между пучком и поверхностью кристалла приблизительно равен 27° или 67° .

7.18. Рассчитать углы θ , под которыми появятся линии от плоскостей (101) и (110) от ромбического кристалла с параметрами решетки $a = 11.878 \text{ \AA}$, $b = 14.246 \text{ \AA}$, $c = 6.218 \text{ \AA}$ при съемке в излучении с длиной волны $\lambda = 1.54 \text{ \AA}$.

Для ромбического кристалла

$$\frac{1}{d^2} = \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2}$$

Ответ:

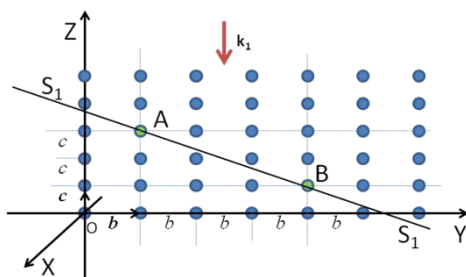
$$\theta_1 = 8.04^\circ, \quad \theta_2 = 4.84^\circ$$

7.19. Какое максимальное число линий может появиться на рентгенограмме от простой кубической решетки с постоянной $a = 2.86 \cdot 10^{-8} \text{ см}$, если исследование ведется на излучении с длиной волны $\lambda = 1.789 \text{ \AA}$? Выписать индексы возможных линий.

Ответ: 10

7.20. Показать, что если две решётки являются обратными одна по отношению к другой, то произведение объёмов их элементарных ячеек равно $(2\pi)^3$.

7.21. На рисунке показан фрагмент орторомбической кристаллической решётки. Начало системы координат O выбрано в одном из узлов решётки, вектор трансляции $\mathbf{a}$ направлен вдоль оси OX (на рис. не показан), вектора трансляции $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ – вдоль осей OY и OZ



соответственно. Параметры решётки a, b, c известны ($a = |\mathbf{a}|$, $b = |\mathbf{b}|$, $c = |\mathbf{c}|$). Плоскость S_1 проходит через выделенные узлы A и B решётки параллельно оси OX .

1. Записать уравнение плоскости S_1 .

2. Найти индексы Миллера $(h k l)$ плоскости S_1 .

3. Найти расстояние d_l между плоскостями с индексами Миллера $(h k l)$, найденными в 2.

4. Пусть на кристалл падает пучок рентгеновского излучения с некоторой длиной волны λ_1 (значение считать известным). Волновой вектор $\mathbf{k}_1$ направлен противоположно оси OZ (см. рис). На какой угол $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ и в каком направлении нужно повернуть кристалл вокруг оси OX для того, чтобы наблюдать дифракционный максимум первого порядка? Рассмотреть три возможных случая в зависимости от величины λ_1 (записать условия, при которых $\Delta\theta = 0$, $\Delta\theta < 0$

– поворот по часовой стрелке, $\Delta\theta > 0$ - поворот против часовой стрелки). Для записи ответа можно использовать обратную тригонометрическую функцию $\arcsin$.

θ - угол между направлением падающей волны (вектором $\mathbf{k}_1$) и плоскостью $S_1 (h k l)$ при наблюдении максимума, θ_0 – начальное значение этого угла, соответствующее положению кристалла на рисунке.

5. Найти модули векторов обратной решётки для данного кристалла.

Ответ:

1. $2cy + 3bz - 11bc = 0$

2. $h = 0$; $k = 2$; $l = 3$

3. $d_1 = \frac{bc}{\sqrt{4c^2 + 9b^2}}$

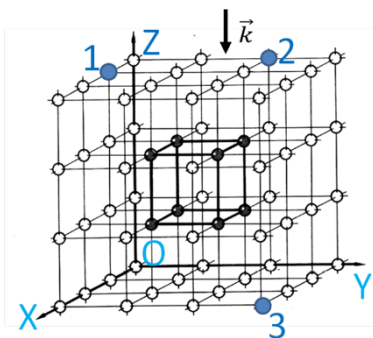
4. Если $\lambda_1 = \frac{6b^2c}{4c^2 + 9b^2}$, то $\Delta\theta = 0$.

Если $\lambda_1 < \frac{6b^2c}{4c^2 + 9b^2}$, то $\Delta\theta = \arcsin\left(\frac{\lambda_1\sqrt{4c^2 + 9b^2}}{2bc}\right) - \arcsin\left(\frac{3b}{\sqrt{4c^2 + 9b^2}}\right) < 0$.

Если $\lambda_1 > \frac{6b^2c}{4c^2 + 9b^2}$, то $\Delta\theta = \arcsin\left(\frac{\lambda_1\sqrt{4c^2 + 9b^2}}{2bc}\right) - \arcsin\left(\frac{3b}{\sqrt{4c^2 + 9b^2}}\right) > 0$.

5. $|\vec{a}^*| = \frac{2\pi}{a}$; $|\vec{b}^*| = \frac{2\pi}{b}$; $|\vec{c}^*| = \frac{2\pi}{c}$

7.22. На рисунке показан фрагмент простой кубической кристаллической решётки и оси координат OX , OY , OZ . Начало координат O выбрано в одном из узлов. Параметр решётки a известен.



1. Записать уравнение плоскости S_1 , проходящей через выделенные на рисунке узлы 1, 2, 3.
2. Найти индексы Миллера $(h_1 k_1 l_1)$ данной плоскости S_1 .
3. Найти расстояние d_1 между плоскостями $(h_1 k_1 l_1)$.

4. Оценить значение длины волны λ электромагнитного излучения, для которого можно наблюдать максимум интенсивности первого порядка при отражении от плоскостей $(h_1 k_1 l_1)$.

Волновой вектор $\vec{k}$ направлен противоположно оси OZ.

Ответ.

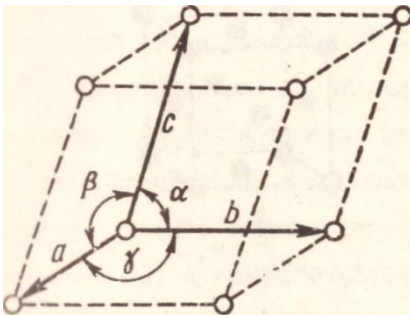
1. $6x + 3y + 7z - 27a = 0$

2. $h_1 = 6 \quad k_1 = 3 \quad l_1 = 7$

3. $d_1 = \frac{a}{\sqrt{94}} \approx 0.1031a$

4. $\lambda = \frac{7a}{47} \approx 0.1489a$

Приложение к заданиям семинара по теме 7.



П-7.1 Объём элементарной ячейки численно равен смешанному произведению векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (см. рис.):

$$V = \vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \dots$$

$$= abc \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}$$

П-7.2 Векторы обратной решётки:

$$\vec{a}^* = 2\pi \frac{[\vec{b}\vec{c}]}{\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]} = 2\pi \frac{[\vec{b}\vec{c}]}{V}$$

$$\vec{b}^* = 2\pi \frac{[\vec{c}\vec{a}]}{\vec{b}[\vec{c}\vec{a}]} = 2\pi \frac{[\vec{c}\vec{a}]}{V}$$

$$\vec{c}^* = 2\pi \frac{[\vec{a}\vec{b}]}{\vec{c}[\vec{a}\vec{b}]} = 2\pi \frac{[\vec{a}\vec{b}]}{V}$$

П-7.3 Свойства обратной решётки, которые определяют её значение для описания проблем дифракции, следующие:

1. Вектор $\vec{r}^* (hkl)$ из начала координат в точку (h, k, l) обратной решётки перпендикулярен к плоскости (hkl) решётки кристалла.
2. Длина вектора $\vec{r}^* (hkl)$ равна обратной величине расстояния $d = d_{hkl}$ между плоскостями (hkl) решётки кристалла: $d_{hkl} = \frac{2\pi}{|\vec{r}^*|}$.

Можно показать, что межплоскостное расстояние d_{hkl} вычисляется по формуле

$$\left(\frac{1}{d_{hkl}}\right)^2 = \frac{1}{V^2} (S_{11}h^2 + S_{22}k^2 + S_{33}l^2 + 2S_{12}hk + 2S_{23}kl + 2S_{13}hl),$$

где введены следующие обозначения:

$$S_{11} = b^2 c^2 \sin^2 \alpha$$

$$S_{12} = abc^2 (\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma)$$

$$S_{22} = a^2 c^2 \sin^2 \beta$$

$$S_{23} = a^2 bc (\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha)$$

$$S_{33} = a^2 b^2 \sin^2 \gamma$$

$$S_{13} = ab^2 c (\cos \gamma \cos \alpha - \cos \beta)$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку с координатами x, y, z :

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$$

p – расстояние от начала координат до данной плоскости.

Направляющие косинусы направления $[hkl]$:

$$\cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}$$

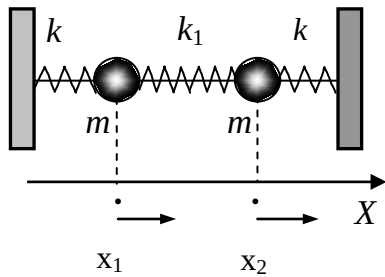
$$\cos \gamma = \frac{l}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}$$

Тема 8. Динамика кристаллической решетки

Дебаевская частота. Температура Дебая. Решеточная теплоемкость. Фононы.

Задачи.

8.1. Найти частоты нормальных колебаний связанных осцилляторов.



Ответ:

$$\omega_I = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_{II} = \sqrt{\frac{k + 2k_1}{m}}$$

8.2. Струна длины L может совершать поперечные колебания в заданной плоскости. Определить число нормальных колебаний струны dz с частотами в интервале от ω до $\omega + d\omega$, если скорость распространения упругих волн в кристалле v .

Ответ:

$$dz = \frac{L}{\pi v} d\omega$$

8.3. 1. Записать формулу Планка для зависимости энергии кванта ε от частоты ν и от круговой частоты ω .

2. Записать численные выражения h и $\hbar$ для постоянной Планка. Как эти значения связаны между собой?

Ответ:

$$1) \varepsilon = h \nu = \hbar \omega;$$

$$2) \hbar = h/2\pi; \quad h = 6.62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}; \quad \hbar = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}.$$

8.4. Пусть в состоянии равновесия некоторой системы гармонических осцилляторов распределение колебаний по значениям энергии подчиняется закону Больцмана. Энергия ε осциллятора может принимать значения $\varepsilon = n\hbar\nu$, где n – целое число, ν – частота. Найти среднюю энергию осциллятора $\langle \varepsilon \rangle$.

$$\text{Ответ: } \langle \varepsilon \rangle = \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}.$$

8.5. Пусть кристалл состоит из N атомов. Получить 1. выражение для теплоёмкости этого кристалла по теории Эйнштейна. Использовать результат задачи 8.4. 2. Получить приближённые выражения для теплоёмкости кристалла при высоких ($kT \gg \hbar\omega$) и низких ($kT \ll \hbar\omega$) температурах.

Ответ:

$$1. C = \frac{3N}{k} \left(\frac{\hbar\omega}{T} \right)^2 \frac{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)}{(\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1)^2};$$

$$2. C = 3Nk; \quad C = \frac{3N(\hbar\omega)^2}{kT^2} \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right).$$

8.6. Определить температуру Дебая θ для одномерной цепочки одинаковых атомов, совершающих колебания вдоль прямой линии, на которой они размещаются. Концентрация атомов $n = 5 \cdot 10^9 \text{ м}^{-1}$. Скорость волн в кристалле $v = 3000 \text{ м/с}$.

Ответ:

$$\theta = \frac{n\pi v \hbar}{k} = 360 \text{ К}$$

8.7. Получить выражение для числа стоячих волн dz (нормальных колебаний) в кристалле по теории Дебая, частоты которых заключены в интервале от ω до $\omega + d\omega$. Скорость распространения упругих волн v , объем кристалла V .

Ответ:

$$dz = \frac{3V\omega^2 d\omega}{2\pi^2 v^3}.$$

8.8. Получить выражение для характеристической дебаевской частоты ω_m .

Ответ:

$$\omega_m = v(6\pi^2 n)^{\frac{1}{3}}.$$

8.9. Найти максимальную энергию фонона ε_m , который может возбуждаться в кристалле с температурой Дебая $300K$?

Фотон какой длины волны обладает такой энергией?

Ответ:

$$\varepsilon_m = 0.026 \text{ эВ}, \quad \lambda = 0.048 \text{ нм}.$$

8.10. Молярная масса серебра $\mu=107.9 \text{ г/моль}$, плотность $\rho=10.5 \text{ г/см}^3$. Оценить максимальное значение импульса фонона в серебре p_m .

Ответ:

$$p_m = \pi \hbar^3 \sqrt{\frac{\rho N_A}{\mu}} = 1.3 \cdot 10^{-24} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$$

8.11. Определить скорость звука в алмазе (ГЦК структура), дебаевская температура $\theta=1860^\circ\text{C}$, наименьшее расстояние между атомами составляет $a=1.54 \text{ \AA}$.

Ответ: $v = \frac{2k\theta a}{h} \approx 11.4 \cdot 10^3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

8.12. Получить выражение для теплоёмкости кристалла (N - число атомов в кристалле) по теории Дебая. Рассмотреть случаи высоких и низких температур (аналогично 8.5).

Ответ:

$$C = \frac{9N\hbar}{\omega_m^3} \int_0^{\omega_m} \frac{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) \hbar\omega^4}{\left(\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1\right)^2 kT^2} d\omega;$$

$$C = 3Nk;$$

$$C = \frac{12}{5} \pi^4 Nk \left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3$$

8.13. Определить количество теплоты ΔQ , необходимое для нагревания кристалла $NaCl$ массой $m = 20$ г на $\Delta T = 2$ К в двух случаях, если нагревание происходит от температуры 1. $T_1 = \theta_D$; 2. $T_2 = 2$ К. Характеристическую температуру Дебая θ_D для $NaCl$ принять равной 320 К.

Ответ:

1. 34.12 Дж;

2. 2.44 мДж.

Тема 9. Зонная теория твердого тела

Зоны Бриллюэна. Энергетический спектр свободных электронов. Уровень Ферми.

Задачи.

9.1. Построить первые две зоны Бриллюэна для двумерной простой прямоугольной решетки с межатомными расстояниями a и b для случая, когда $a = 3b$.

9.2. Используя уравнение Брэгга в форме $2\vec{k}\vec{G} + G^2 = 0$ ($\vec{G}$ – вектор обратной решётки, см. Приложение II-7.2), определить границы первых трёх зон Бриллюэна для двумерной квадратной решётки с постоянной a . Изобразить графически эти зоны на плоскости (k_x, k_y) .

9.3. Показать, что для двумерной простой квадратной решетки кинетическая энергия свободного электрона в угле первой зоны Бриллюэна вдвое больше, чем в середине боковой стороны зоны.

9.4. Какова вероятность того, что электрон в металле будет иметь энергию, равную энергии Ферми при температуре $T \neq 0$? Каковы вероятности того, что при комнатной температуре ($kT=0.025$ эВ) электрон займет состояния, лежащие на 0.1 эВ выше и на 0.1 эВ ниже уровня Ферми?

Ответ:

0.5

$1.7986 \cdot 10^{-2}$, 0.982

9.5. Вычислить энергию Ферми E_F , отсчитанную от дна зоны проводимости, при температуре $T = 0$ K для валентных электронов натрия. Оценить максимальную скорость электронов v_{max} при $T = 0$ K. Плотность натрия $\rho = 0.97 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса натрия $\mu = 23 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Ответ:

$E_F = 3.1$ эВ, $v_{max} = 1.1 \cdot 10^6$ м/с.

9.6. 1. Найдите максимальную энергию электрона в металле при 0 K. 2. Определите среднюю энергию электрона при абсолютном нуле.

Ответ:

$$1. E_F = \frac{3}{2} \frac{\hbar^2}{2\pi} (2m)^{\frac{2}{3}} n_0^{\frac{2}{3}}$$

$$2. \langle E \rangle = \frac{3}{5} E_F$$

9.7. 1. Что произойдет с интервалом $\Delta\varepsilon$ между соседними уровнями энергии свободных электронов в металле при увеличении объема металла в три раза? 2. Что произойдет с энергетическим спектром свободных электронов при увеличении числа атомов N , образующих кристалл, в η раз?

Ответ:

1. $\Delta\varepsilon$ уменьшится в 3 раза.

2. Плотность уровней $\frac{dn}{dE}$ возрастет в η раз.

9.8. Кристаллический образец содержит 0.17 моля некоторого химически простого вещества. Ширина разрешенной зоны энергий $\Delta E = 10$ эВ. Чему равно среднее значение интервала между соседними энергетическими уровнями $\langle \Delta\varepsilon \rangle$?

Ответ: $\langle \Delta\varepsilon \rangle = 1.0 \cdot 10^{-22}$ эВ

9.9. Написать выражение для интервала $\Delta\varepsilon$ между соседними уровнями энергии свободных электронов в металле.

Положив объем образца металла равным 1 см^3 , вычислить интервал $\Delta\varepsilon$ (в эВ) между соседними уровнями энергии свободных электронов для значений энергий E , равных 1. 0.1 эВ, 2. 1 эВ, 3. 3 эВ, 4. 5 эВ.

Ответ:

$$\Delta\varepsilon = \frac{(2\pi\hbar)^3}{4\pi V} (2m)^{-\frac{3}{2}} E^{-\frac{1}{2}}$$

$$1. 4.7 \cdot 10^{-22} \text{ эВ}$$

$$2. 1.5 \cdot 10^{-22} \text{ эВ}$$

$$3. 0.85 \cdot 10^{-22} \text{ эВ}$$

$$4. 0.66 \cdot 10^{-22} \text{ эВ}$$

9.10. Полагая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон, определить

1. уровень Ферми при абсолютном нуле, $E_F(0)$, для меди.
2. среднюю кинетическую энергию $\langle E \rangle$ свободных электронов при абсолютном нуле.
3. температуру T , при которой средняя кинетическая энергия классического электронного газа равнялась бы средней энергии свободных электронов в меди при $T=0$.

Ответ:

$$1. E_F(0) = \left(\frac{3\pi^2 N_A \rho}{M} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m_e} = 7.04 \text{ эВ}$$

$$2. \langle E \rangle = \frac{3E_F(0)}{5} = 4.23 \text{ эВ}$$

$$3. T = \frac{2\langle E \rangle}{3k} = 3.27 \cdot 10^4 \text{ К.}$$

9.11. Положив уровень Ферми при абсолютном нуле $E_F(0)=5 \text{ эВ}$ определить уровень Ферми при $T=300 \text{ К}$. Выразить E_F через $E_F(0)$.

Ответ:

$$E_F \approx E_F(0) \left(1 - \frac{\left(\frac{\pi k T}{E_F(0)} \right)^2}{12} \right) = E_F(0) (1 - 2.2 \cdot 10^{-5})$$

9.12. Какая часть η свободных электронов в металле имеет при абсолютном нуле кинетическую энергию, превышающую половину максимальной?

Ответ:

$$\eta = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} = 0.65$$

Тема 10. Электрические свойства металлов.

Электропроводность. Электросопротивление. Подвижность носителей тока. Эффект Холла.

Задачи.

10.1. Чему равна подвижность электронов натрия при 0^0C , если электропроводность его $0.23 \cdot 10^8 \text{ ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$, а концентрация носителей заряда $2.5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$?

Ответ:

$$\mu = \frac{\sigma}{ne^2} = 0.56 \cdot 10^{-2} \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$$

10.2. Отношение электропроводностей серебра и меди при одинаковой температуре равно $\frac{6.12}{5.76}$. Вычислить отношение подвижностей электронов в этих металлах, считая, что на каждый атом приходится по одному свободному электрону.

Ответ:

$$\frac{\mu_{\text{Ag}}}{\mu_{\text{Cu}}} \approx 1.5$$

10.3. Электропроводность меди $6 \cdot 10^7 \text{ ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$. Определить время релаксации электрона, считая, что каждый атом меди в твердом состоянии отдает в зону проводимости один валентный электрон.

Ответ:

$$\tau = \frac{\sigma m M}{N_A \rho e^2} = 0.25 \cdot 10^{-13} \text{ с}$$

10.4. Электропроводность Na $\sigma = 2.17 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$, отношение эффективной массы электрона к массе свободного электрона $\frac{m^*}{m} = 1.2$. Определить 1. время релаксации τ при температуре $T=300\text{K}$, 2. среднюю длину свободного пробега электронов λ при температуре 300K , 3. дрейфовую скорость в поле $E=100 \text{ В/м}$.

Ответ:

$$1. \tau = 3.7 \cdot 10^{-14} \text{ с},$$

$$2. \lambda = 3.7 \cdot 10^{-9} \text{ м}.$$

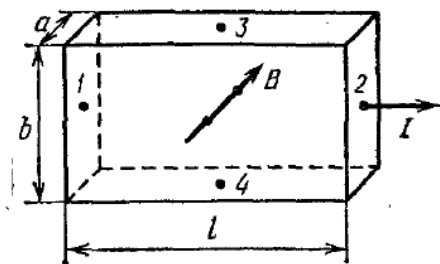
$$3. v = 0.54 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

10.5. Вычислить постоянную Холла R для меди. Молярная масса меди 63.5 г/моль , ее плотность $\rho = 8890 \text{ кг/м}^3$.

Ответ:

$$R \approx 0.74 \cdot 10^{-10} \frac{\text{м}^3}{\text{Кл}}$$

10.6. Медная пластинка имеет длину $l = 60 \text{ мм}$, ширину $b = 20 \text{ мм}$, толщину $a = 1 \text{ мм}$. При пропускании вдоль пластинки тока силы $I = 10 \text{ А}$ между точками 1 и 2 возникает разность потенциалов $U_{12} = 0.51 \text{ мВ}$, разность потенциалов между точками 3 и 4 равна нулю. Если, не выключая тока, создать перпендикулярное к пластинке однородное магнитное поле с индукцией $B = 0.1 \text{ Тл}$, то между точками 3 и 4 возникнет разность потенциалов $U_{34} = 55 \text{ нВ}$. Определите для меди концентрацию свободных электронов n и их подвижность μ .



Ответ:

$$N = \frac{IB}{eaU_{34}} = 1.1 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}$$

$$\mu = \frac{lU_{34}}{bBU_{12}} = 3.2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$$

Тема 11. Полупроводники

Собственные, примесные полупроводники. Дрейфовая скорость. Электропроводность. Удельное сопротивление. Подвижность носителей тока. Эффект Холла.

Задачи.

11.1. Образец полупроводника имеет ширину $a = 6 \text{ мм}$. В образце, помещенном в магнитное поле $B = 0,5 \text{ Тл}$ перпендикулярно плоскости пластины, возникает холловское напряжение $U = 5 \text{ мВ}$, когда протекающий через образец ток $I = 10 \text{ мА}$. Предполагая проводимость образца примесной, n -типа, определить концентрацию носителей тока n .

Ответ. $n = \frac{IB}{Uae} = 1 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$

11.2. Пластина полупроводника n -типа квадратного сечения с шириной $a = 1 \text{ мм}$ помещена в магнитное поле с индукцией B . Ток, проходящий через пластину, равен $I = 50 \text{ мА}$. Величина образовавшейся разности потенциалов Холла составляет $U = 10 \text{ мВ}$. Определить индукцию B , если концентрация носителей заряда $n = 10^{16} \text{ см}^{-3}$.

Ответ:

$$B = \frac{Uea}{I}n = 0.32 \text{ Тл}$$

11.3. Удельная электропроводность и постоянная Холла арсенида индия равны $\sigma = 4 \cdot 10^2 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$ и $R = 10^{-2} \text{ м}^3/\text{Кл}$. Проводимость осуществляется зарядами одного знака. Определить их концентрацию n и подвижность μ .

Ответ:

$$n = 6.25 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$$

$$\mu = 4 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$$

11.4. Удельная проводимость кремния с примесями равна $\sigma=112 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$. Определить подвижность дырок μ_p и их концентрацию n_p , если постоянная Холла $R=3.66 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{Кл}$. Считать, что полупроводник обладает только дырочной проводимостью.

Ответ:

$$\mu_p = 4 \cdot 10^{-2} \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$$

$$n_p = 1.7 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$$

11.5. Образец полупроводника прямоугольной формы размерами $(0.2 \times 0.2 \times 0.05) \text{ см}^3$ имеет 10^{21} свободных зарядов в 1 м^3 при 20°C . К двум противоположным узким граням приложено напряжение в 20 В . Найдите величину тока I , если подвижность носителей заряда $\mu=0.03 \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$.

Ответ:

$$I = 4.8 \cdot 10^{-2} \text{ А}$$

11.6. Удельное электросопротивление монокристалла кремния p -типа при температуре $T=300 \text{ К}$ равно $\rho = 9 \cdot 10^{-4} \text{ Ом} \cdot \text{м}$. Чему равна постоянная Холла, если подвижность дырок $\mu_p=0.03 \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$.

Ответ:

$$R = 3.6 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^3}{\text{Кл}}$$

11.7. Вычислить скорость дрейфа электронов и дырок в германии при комнатной температуре в поле $E = 1000 \text{ В/м}$, если $\mu_n = 0.038 \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$ и $\mu_p = 0.18 \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$.

Ответ:

$$u_n = 380 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$u_p = 180 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

11.8. Определить электропроводность σ германия, который содержит примеси индия в концентрации $2 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$ и сурьмы в концентрации 10^{21} м^{-3} . Подвижность электронов и дырок в германии $\mu_n = 0.038 \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$ и $\mu_p = 0.18 \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$, соответственно.

Ответ:

$$\sigma = 474 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$$

11.9. Удельное электросопротивление собственного полупроводника при 27°C равно $\rho = 0.47 \text{ Ом} \cdot \text{м}$. Вычислить плотность носителей тока, если подвижность электронов $\mu_n = 0.038 \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$, а подвижность дырок $\mu_p = 0.18 \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$.

Ответ:

$$n = 2.3 \cdot 10^{-19} \text{ м}^{-3}$$

Тема 12. Магнитные свойства вещества.

Магнитный момент атома. Магнетон Бора. Диамагнетизм, парамагнетизм, ферромагнетизм.

Задачи.

12.1. Для модели атома Бора записать выражения для:

1. орбитального механического момента импульса p_l электрона;
2. орбитального магнитного момента μ_l электрона;
3. орбитального гиромагнитного отношения G_l ;
4. магнетона Бора μ_B ;
5. спинowego гиромагнитного отношения G_s .

12.2. Получить выражение для ларморовой угловой частоты ω_L (частоты прецессии орбиты электрона вокруг направления индукции внешнего магнитного поля B).

Ответ:

$$\omega_L = \frac{eB}{2m_e}.$$

12.3. Получить выражение для магнитной восприимчивости χ диамагнетика в классическом представлении. Число Z электронов в атоме, число n атомов в единице объёма диамагнетика и средний квадрат радиуса $\langle a^2 \rangle$ электронной орбиты считать известными. Выразить ответ через эти три величины, а также заряд электрона e , массу электрона m_e , магнитную постоянную μ_0 .

Ответ:

$$\chi = - \frac{\mu_0 Z e^2 n \langle a^2 \rangle}{6 m_e}.$$

12.4. Вычислить магнитный момент ΔM атома меди, наводимый внешним магнитным полем с индукцией $B_0 = 10 \text{ мТл}$, и ларморову частоту ω_L прецессии электронов. Плотность меди составляет $\rho_{\text{Cu}} = 8.93 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, молярная масса $\mu = 0.064 \text{ кг/моль}$.

Ответ:

$$\Delta M = - 0.36 \cdot 10^{-35} \text{ Вб} \cdot \text{м}; \quad \omega_L = 9 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}.$$

12.5. Изобразить на рисунке примерную зависимость намагниченности I от напряженности магнитного поля H для диа- и парамагнетиков в слабых и сильных магнитных полях. Привести примеры веществ, которые относятся к классу диамагнетиков и парамагнетиков. Сформулировать законы Кюри и Кюри-Вейсса.

12.6. Атом платины (парамагнетик) находится в состоянии 3D_3 . Выписать выражения для квантового числа J , g -фактора Ланде g , а также концентрации атомов n . Оценить значение намагниченности насыщения I_s платины, если ее плотность $\rho_{Pt} = 21.4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, молярная масса $\mu = 0.195 \text{ кг/моль}$.

Ответ:

$$I_s \approx ngI\mu_B = 2.44 \cdot 10^6 \text{ Вб/м}^2.$$

12.7. Изобразить на рисунке примерную зависимость намагниченности I от напряженности магнитного поля H для ферромагнетиков в слабых и сильных магнитных полях. Определить следующие понятия: остаточная намагниченность, коэрцитивная сила, петля гистерезиса, техническое намагничивание, парапроцесс, процессы смещения и вращения доменных границ, направления (оси) легкого и трудного намагничивания. Привести примеры веществ, обладающих ферромагнитным упорядочением магнитных моментов.

Константы

Название	Обозначение	Значение
Универсальная газовая постоянная	R	$8.31 \text{ Дж/моль}\cdot\text{К}$
Постоянная Больцмана	k	$1.38\cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Число Авогадро	N_A	$6.02\cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Постоянная Планка	h	$6.63\cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$
Постоянная Планка	$\hbar = h/2\pi$	$1.05\cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$
Элементарный электрический заряд	e	$1.6\cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Масса электрона	m_e	$9.11\cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Масса протона	m_p	$1.67\cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Электрическая постоянная	ε_0	$8.85\cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi\cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$
Ускорение свободного падения	g	9.8 м/с^2

Литература.

Л.Г. Антошина, С.В. Павлов, Л.А. Скипетрова. Общая физика. Сборник задач. Учебное пособие. Москва. ИНФРА-М, 2008.

И.В. Савельев. Сборник вопросов и задач по общей физике: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. Лит., 1988.

Д. В. Сивухин. Общий курс физики. Том 2. Термодинамика и молекулярная физика. Издание шестое, стереотипное. Москва. Физматлит. 2014.

В. М. Варикаш, Ю. М. Хачатрян. Избранные задачи по физике твёрдого тела. Минск. «Вышэйш. школа». 1969.

Д.И. Сирота. Физика твёрдого тела. Сборник задач с подробными решениями. Учебное пособие. Издание второе, исправленное. Москва. Книжный дом «ЛИБРОКОМ». 2010.

И.Е. Иродов. Задачи по общей физике. Учебное пособие. Лань. Санкт-Петербург, 2001.

Ч. Киттель. Элементарная физика твердого тела. Наука. М. 1965.

Е.П. Свирина. Физика газообразного, жидкого и твердого состояний вещества. Издательство Московского университета, 2000.